



DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

## Exame Geral de Doutorado Segundo Semestre de 2016

### Mecânica Estatística

9/3/2016 - 9h às 12h

Escolha três dentre as quatro questões.

Identifique sua Prova apenas com o número de seu CPF.

Consulte as Informações Auxiliares no final da Prova.

**Questão 1: Termodinâmica - máquinas térmicas**

Considere o *ciclo de Brayton* que descreve o funcionamento das turbinas a gás, operando entre dois reservatórios de pressão  $p_A$  e  $p_B$ , consistindo de quatro *processos*:

1. Expansão *adiabática* do estado 1 ( $p_A, V_1, T_1$ ) para o estado 2 ( $p_B, V_2, T_2$ ),
2. Expansão *isobárica* do estado 2 ( $p_B, V_2, T_2$ ) para o estado 3 ( $p_B, V_3, T_3$ ),
3. Compressão *adiabática* do estado 3 ( $p_B, V_3, T_3$ ) para o estado 4 ( $p_A, V_4, T_4$ ) e
4. Compressão *isobárica* do estado 4 ( $p_A, V_4, T_4$ ) para o estado 1 ( $p_A, V_1, T_1$ ), inicial.

onde  $p$ ,  $V$ ,  $T$  são as variáveis de estado *pressão*, *volume* e *temperatura*, respectivamente.

Considere que a substância de trabalho da *máquina* é um ***gás ideal monoatômico***.

- (a) (30%) Esboce o diagrama  $PV$  do ciclo e calcule o trabalho realizado em cada processo. Obtenha o trabalho total por ciclo.
- (b) (20%) Calcule o calor *absorvido* e o calor *cedido* ao longo do ciclo indicando em quais processos ocorreram, respectivamente.
- (c) (20%) Defina a *eficiência*,  $\eta$ , de uma máquina térmica e calcule a  $\eta$  para o ciclo acima em termos das pressões e volumes dos 4 estados que especificam o ciclo.
- (d) (30%) Use as propriedades dos processos adiabáticos 1 e 3 e mostre que  $V_1 V_3 = V_2 V_4$ .

Use essa relação para rescrever  $\eta$  apenas em termos das pressões  $p_A$  e  $p_B$ .

**Questão 2: Formalismo Canônico – Sistemas com Poucos Níveis**

Considere uma amostra de  $N$  átomos (não interagentes) em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ . O átomo possui um estado fundamental de energia  $\epsilon_1 = 0$ , com degenerescência  $g_1$ , e estados excitados de energia  $\epsilon_n$ , com degenerescência  $g_n$ , sendo  $\epsilon_n > \epsilon_{n-1}$ , para  $n = 2, 3, \dots$

Suponha, inicialmente, que *apenas* o primeiro estado excitado do átomo é levado em consideração para o cálculo das propriedades termodinâmicas da substância, ou seja, trate o átomo como tendo *apenas* dois níveis de energia.

- (a) (50%) Obtenha a função de partição  $Z(N, T)$  do sistema na aproximação acima. Calcule a energia livre por partícula,  $u(T) = U/N$ , onde  $U(N, T)$  é a energia interna do sistema, e determine o calor específico  $c(T)$  por partícula. Faça um esboço de  $c(T)$  como função da temperatura. Em particular, analise o comportamento de  $c(T)$  para *baixas* e *altas* temperaturas, ou seja,  $kT \ll \epsilon_2$  e  $kT \gg \epsilon_2$ , respectivamente.

Considere agora o caso em que são incluídas as contribuições até o *segundo estado excitado*, de modo que o átomo *deve* ser tratado como tendo *três* níveis de energia.

- (b) (20%) Obtenha a expressão para a energia livre por partícula  $u(T)$ , nesse caso, e mostre que no regime de temperaturas  $\epsilon_2 \sim k_B T$  e  $k_B T \ll \epsilon_3$  obtém-se o mesmo resultado do item anterior, como esperado.
- (c) (30%) Analise agora o limite de *altas temperaturas* para a energia  $u(T)$  obtida no item anterior, isto é,  $kT \gg \epsilon_3$ , e mostre que nesse caso o comportamento depende da dispersão dos níveis de energia em torno da média  $\langle \epsilon \rangle$ , da seguinte forma:

$$u(T) = \langle \epsilon \rangle - \frac{\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2}{kT},$$

onde

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^3 g_n \epsilon_n, \quad \langle \epsilon^2 \rangle = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^3 g_n \epsilon_n^2, \quad \text{e} \quad G = \sum_{n=1}^3 g_n.$$

**Questão 3: Gás de Fermi**

Considere um gás de Fermi com  $N$  partículas de massa  $m$ , confinado em um *poço* de potencial *infinito*, unidimensional de comprimento  $L$  e em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura  $T$ .

- (a) (20%) Mostre que a densidade de estados  $D(\varepsilon)$  é dada pela expressão

$$D(\varepsilon) = \frac{L\pi}{\hbar} \sqrt{2m} \varepsilon^{-1/2},$$

onde  $\varepsilon$  é a energia por partícula do gás.

Dados: lembre-se de que  $k = n\pi/L$  relaciona o número de onda  $k$  de cada partícula com o comprimento  $L$  da caixa.

- (b) (30%) Considere que o gás está à temperatura  $T = 0$ .

Determine a energia média do gás em termos da energia de Fermi  $\varepsilon_F$ .

Em seguida, obtenha  $\varepsilon_F$ .

Considere, a partir de agora, que o gás está à temperatura  $T > 0$ .

- (c) (30%) Use a grã-função de partição e calcule o *número médio*  $\langle n_j \rangle$  de partículas por estado que estabelece a *estatística de Fermi-Dirac*. Veja as Informações Auxiliares no final da prova.
- (d) (20%) Escreva as expressões para o *número total de partículas*, para a *energia interna* do sistema e para o *calor específico* do gás em termos de integrais em  $\varepsilon$ .

### Questão 4: Modelo de Ising

Considere um sistema de  $N$  spins de Ising ( $S = \pm 1$ ), com interações  $J > 0$  entre *todos* os pares de spins e na presença de um campo magnético  $h$ , descrito pelo hamiltoniano

$$H = -\frac{J}{2N} \sum_{i,j=1}^N S_i S_j - h \sum_{i=1}^N S_i,$$

onde a soma sobre os pares  $i$  e  $j$  ocorre de maneira irrestrita sobre todos os  $N$  spins do sistema, ou seja, as interações têm *alcance infinito*. Isso permite reescrever  $H$  na forma

$$H = -\frac{J}{2N} S^2 - hS \quad \text{com} \quad S \equiv \sum_{i=1}^N S_i.$$

O sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura  $T$ .

- (a) (30%) Calcule a função de partição  $Z(T, N, h)$  do sistema. Usando a *identidade de Gauss*,

$$e^{KS^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2/2K + xS)} dx,$$

mostre que  $Z(T, N, h)$  pode ser escrita como

$$Z(T, N, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2K} [2 \cosh(x + \beta h)]^N dx, \quad \text{com} \quad K = \frac{\beta J}{N},$$

onde  $\beta = 1/k_B T$ .

- (b) (50%) Calcule a magnetização média  $m$  por spin, no limite  $N \rightarrow \infty$ , definida por:

$$m(T, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(T, N, h) \right].$$

Sugestão: Calcule  $Z(T, N, h)$  resolvendo a integral acima no limite  $N \rightarrow \infty$  através do método do ponto de sela. Esse método permite calcular integrais da forma  $\int e^{N\phi(x)} dx$  no limite  $N \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left[ \int e^{N\phi(x)} dx \right] = \phi(x_0),$$

onde  $x_0$  é o valor de  $x$  que maximiza o expoente  $\phi(x)$  no intervalo de integração.

Expresse  $m(T, h)$  em termos de  $x_0$  e obtenha a equação transcendental que determina  $m(T, h)$ , a partir da equação correspondente que determina  $x_0$ .

- (c) (20%) Resolva graficamente a equação transcendental para  $m_0(T) \equiv m(T, 0)$ , no caso de campo nulo ( $h = 0$ ), e mostre que existe uma magnetização espontânea  $m_0(T)$  não nula para  $T$  abaixo de um valor crítico  $T_c$ .

**Informações Auxiliares**

Grã-função de partição:

Pode ser escrita nas seguintes formas:

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum'_{\{n_j\}} e^{-\beta \sum_j (\epsilon_j - \mu) n_j} \quad \text{ou} \quad \mathcal{Z}(T, V, \mu) = \prod_j \left[ \sum_{n_j} \exp [-\beta (\epsilon_j - \mu) n_j] \right],$$

onde  $\mu$  é o potencial químico,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $\epsilon_j$  são os possíveis estados de energia das partículas e  $n_j$  representa o número de ocupação do estado  $j$ .

O superescrito (') na soma sobre as configurações  $\{n_j\}$  indica a restrição que  $N = \sum_j n_j$ .